٣٤٣ريض–م

" Group Theory نظرية الزمر "

تعريف : لتكن $G \neq \emptyset$ مجموعة غير خالية معرفاً عليها العملية الثنائية *.

إن النظام (G , *) يقال عنه زمرة إذا تحققت الشروط :–

(i) * تجميعية.

(ii) يوجد عنصر محايد $1 \in G$ يحقق $g*1 = 1*g = g \quad \forall g \in G$.

(iii) لكل عنصر $g \in G$ يوجد معكوس $g^{-1} \in G$ بحيث :–

$$g*g^{-1} = g^{-1} * g = 1$$

إذا تحقق أيضاً أن $g_1*g_2 = g_2*g_1$ لكل $g_1,g_2 \in G$ فإن G يقال عنها حينئذٍ زمرة Abelian Group.

عادة نكتب g_1*g_2 بالشكل $g_1.g_2$ أو g_1g_2.

ملاحظة : إذا تحقق الشرط (i) فإن G تسمى شبه زمرة semi-group.

وإذا تحقق الشرطان (i) و(ii) فإن G تسمى مونويد Monoid.

من التعريف مباشرة يمكن برهنة القضايا التالية :–

مبرهنة : إذا كانت G زمرة فإن :–

(i) المحايد وحيد.

(ii) المعكوس وحيد.

(iii) $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} \quad \forall a, b \in G$.

(iv) قانون الاختصار محقق.

فكرة البرهان :–

(i) $1 = 1 \cdot 1' = 1'$

(ii) $x' = x'^{-1}\, x\, x^{-1} = x^{-1}$

(iii) $ab.b^{-1}a^{-1} = 1 \quad \Rightarrow \quad b^{-1}a^{-1} = (ab)^{-1}$

(iv) $ab = ac \quad \Rightarrow \quad b=c$

يمكن إضعاف شروط الزمرة كما يلي :-

مبرهنة :

لتكن (G , *) نظاماً ذا عملية ثنائية تجميعية يملك عنصراً محايداً أيسر، ولكل عنصر يوجد يوجد معكوس أيسر فإن (G , *) زمرة.

فكرة البرهان : نبرهن أولاً : أنه لكل $a \in G$ يوجد معكوس أيمن.

ليكن a^{-1} هو المعكوس الأيسر $a^{-1} a = 1$، ولنعتبر :

$a\, a^{-1} = b$

$b\, b = a\, a^{-1}\, a\, a^{-1} = a\,.\,1\,.\,a^{-1} = a\, a^{-1} = b$

$\Rightarrow\ b^{-1}\, b\, b = b^{-1}\, b = 1$

$\Rightarrow b = 1$

نبرهن ثانياً أن 1 محايد أيمن كما يلي :-

$$X.1 = X\,(X^{-1}X) = (XX^{-1})X = 1\,.X = X \qquad \forall X \in G$$

****

تمارين الأسبوع الأول :

تمارين الفصل الثاني :

- تمرين (**1**) .
- تمرين (**2**) .
- تمرين (**3**) .
- تمرين (**4**) .
- تمرين (**5**) .