مبرهنة :

$S_n = <(1\ 2)(1\ 3)(1\ 4)\ \ldots\ (1\ \ n)>$ (i)

$S_n = <(1\ 2)\ (2\ 3)\ \ldots.\ \ (n-1\ , n\ )>$ (ii)

(iii) S_n يمكن توليدها بدورة طولها n ومناقلة .

البرهان :

(i) بما أن كل دورة تكتب على هيئة مناقلات يكفي أن نبرهن أن أي مناقلة يمكن كتابتها بدلالة عناصر المجموعة :

لكن لاحظ أن :

(ii) من (i) يكفي برهان أن أي مناقلة (i j) تكتب بدلالة العناصر:

$$\{(1\ 2)\ ,\ (2\ 3)\ ,\ \ldots\ldots\ldots.,\ (n\text{-}1\ \ n)\}$$

لكن لاحظ أن :

$$(1\ \ j) = (1\ \ j\text{-}1)\ \ (j\text{-}\ \ \ j)\ \ (1\ \ j\text{-}1)$$

بالإستقراء يمكن التعبير عن (i j-1) بـــ (1 j-2) ... وهكذا.

(iii) لنفرض أن المناقلة هي $\tau = (1\ 2)$ (من غير إخلال بالعمومية)،
وبما أن لدينا دورة طولها n ولتكن σ إذن يوجد $k \in \mathbb{N}$ بحيث $\sigma^k(1) = 2$،
لنرمز لـ σ^k بالرمز $\tilde{\sigma}$ ، حيث :

إذن :

$$\tilde{\sigma}\tau\tilde{\sigma}^{-1} = (\ 2\ \ i_3)$$
$$\tilde{\sigma}\ \tilde{\sigma}\tau\tilde{\sigma}^{-1}\tilde{\sigma}^{-1} = (\ i_3, i_4)$$
$$= \tilde{\sigma}(2\ i_3)\ \tilde{\sigma}^{-1}$$

وهكذا

نجد أيضاً أن :-

$$(\,1\ i_3\,)(\,i_3\ i_4\,)(\,1\ i_3\,) = (\,1\ i_4\,)$$

وهكذا

هذا يعني أن :-

$< \tau, \sigma$ $=$

إن هذه المبرهنة تؤكد على أن كل تبديل يمكن أن يكتب على هيئة ضرب مناقلات (ليست وحيدة لأننا دائماً نستطيع أن نضرب مثلاً بـ $1 = (12)(12)$).

<u>تمهيدية</u> :

العنصر $id \in S_n$ لا يمكن أن يكتب على هيئة ضرب مناقلات عددها فردي.

<u>البرهان</u> :

نفرض العكس أي أن id يكتب على هيئة ضرب مناقلات عددها m فردي (أقل ما يمكن):

إذن $m \geq 3$ وضوحاً. ليكن k أكبر عدد من $\{\,1,2,\ldots\ldots,n\,\}$ يظهر في هذه المناقلات.

نستطيع أن نعيد كتابة id باستخدام القاعدتين :

(1) $\qquad (ak)(ab) = (\,ab\,)(\,ak\,)$

(2) $\qquad (ak)(cb) = (\,cb\,)(\,ak\,)$

كما يلي :-

$$id = (\,\alpha_1\beta_1)\ldots(\,\alpha_r\beta_r)\,(\,\alpha_{r+1}k)\ldots(\,\alpha_m k)\ ---(*)$$

يمكن ملاحظة أن :

$\alpha_i =$

لأنه باستخدام القاعدة :

(3) $\qquad (\,ak\,)(\,bk\,) = (\,ab\,)(\,ak\,)$

ولو فرضنا أن : $(\,\alpha_i k) = \left(\,\alpha_j k\right)$

فإننا نستطيع إزاحة $(\,\alpha_i k)$ لتكن بجوار $\left(\,\alpha_j k\right)$ وبضربهما نحصل على :-

وهذا يتناقض مع كون m أصغر ما يمكن.

الآن : بالعودة إلى $(\,*\,)$ نجد أن id يرسل k إلى α_m ،

وجميع المناقلات $(\,\alpha_{k+1}k),\ldots,(\,\alpha_{m-1}k)$ لا تحتوي α_m

والمناقلات $(\,\alpha_1\beta_1),\ldots\ldots,(\,\alpha_r\beta_r)$ جميع أعدادها من المجموعة $\{1,2,\ldots\ldots,k-1\,\}$، هذا يعني أن id ينقل k إلى عنصر من المجموعة $\{\,1,2,\ldots\ldots,k-1\,\}$، وهذا مستحيل، مما يثبت النظرية.

نتيجة : أي عنصر $\sigma \in S_n$ إما أن يكتب على هيئة حاصل ضرب مناقلات عددها فردي أو حاصل ضرب مناقلات عددها زوجي، ولا يمكن أن يكتب بالطريقتين معاً.

البرهان :

ليكن :

حيث m فردي و r زوجي و τ_i, λ_i مناقلات.

$= id$

وعددها فردي مما يناقض التمهيدية أعلاه.

تعريف : يقال عن $\sigma \in S_n$ إنه تبديل زوجي إذا كان يمكن أن يكتب على هيئة حاصل ضرب مناقلات عددها زوجي. وإن لم يمكن ذلك فيقال عنه إنه تبديل فردي.

تعريف :

إذا رمزنا للمجموعة :

فإن A_n زمرة جزئية من S_n تسمى الزمرة المناوبة.

ونرمز للمجموعة $S_n - A_n$ بالرمز B_n .

مبرهنة :

(i) $[S_n - A_n] = 2$ ومنه $|A_n| = \frac{n!}{2}$

(ii) $A_n = < \{ \sigma \in S_n : 3$ زمرة طولها $\sigma \} >$

(iii) $A_n = < (1\ 2\ 3)(1\ 2\ 4) \dots (1\ 2\ n) >$

البرهان :

(i) تعرف التطبيق :

$\mathcal{F}$ معرفاً تماماً. $\mathcal{F}$ متباين لأنه إذا كان $(12)\ \tau = (12)\ \sigma$

فإن : $\sigma = \tau$

إذن : $|B_n| \geq |A_n|$.

كذلك نعرف التطبيق :

$g: B_n \to A_n,\ g(\sigma) = (1\ 2)\sigma$.

أيضاً g متباين.

إذن : $|A_n| \geq |B_n|$

وعليه فإن :

$[\, S_n - A_n \,] = \frac{n!}{2}$

وأن $|A_n| = |B_n| = \frac{n!}{2}$

(ii) ينتج مباشر من القاعدتين :

(1) $\quad (a\ b)(c\ d) = (a\ c\ d)(a\ b\ d)$

(2) $\quad (a\ b)(b\ c) = (a\ b\ c)$

(iii) ينتج مباشرة من فرع (ii)ومن ملاحظة أن :

$$(a\ b\ c) = (1\ a\ b)(1\ b\ c)$$

$$= (1\ 2\ b)(\ 1\ 2\ a)(1\ 2\ a)(1\ 2\ c)(1\ 2\ c)(1\ 2\ b)(1\ 2\ b)$$

حيث $a, b, c > 2$

وفي الحالة الخاصة لدينا :

$$(1\ a\ 2) = (1\ 2\ a)(1\ 2\ a)$$

****

تمارين الأسبوع الرابع:

تمارين الفصل التاسع:

- **تمرين(1).**
- **تمرين(2).**
- **(عين التباديل الزوجية والتباديل الفردية للتبديل(5 4)(3 2 1)=α).**
- **(أوجد جدول كايلي للزمرة A_3).**