الأسبوع الثاني:

أمثلة على الزمر :

١) $(\mathbb{Z}, +)$ زمرة إبدالية غير منتهية.

٢) $(\mathbb{Z}_n, \oplus)$ زمرة إبدالية منتهية.

$$(U_n^*, \odot) = \{ X \in \mathbb{Z}_n : \gcd(X, n) = 1 \}$$

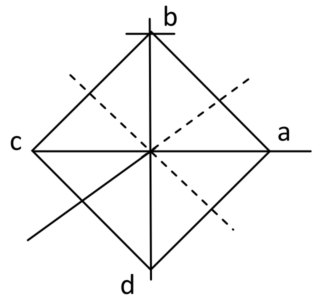
٣) $(\mathbb{F}, +)$ ، $(\mathbb{F}^*, \cdot)$ زمرتان إبداليتان حيث $\mathbb{F}$ أي حقل.

٤) لتكن S مجموعة ولتكن G =Bi (S) هي مجموعة جميع التطبيقات التقابلات من S إلى نفسها.

إن (G, o) زمرة غير إبدالية حيث o عملية تحصيل التطبيقات.

٥) في مثال ٤ عندما نأخذ الحالة الخاصة $S = \{1,2, ..., n\}$ ، نحصل على $Bi(S) = S_n$، وهي الزمرة التي تسمى Permutation Group زمرة التباديل من المجموعة S إلى نفسها وعدد عناصرها $n!$. أحياناً تسمى الزمرة S_n بزمرة التناظر Symmetric Group.

٦) زمرة دايهيدرال : ليكن Γ مضلعاً نونياً منتظماً مركزه نقطة الأصل. لدينا n دوراناً بزاوية قدرها $\frac{2\pi\kappa}{n}$ حيث $\kappa = 0,1,2, ..., n-1$ عكس اتجاه عقارب الساعة، كما أن لدينا n انعكاساً.



فإذا رمزنا للدوران بزاوية $\frac{2\pi}{n}$ بالرمز σ وللانعكاس حول المحور الذي يصنع مع المحور السيني زاوية قدرها $\frac{\pi}{n}$ فإنه باعتبار رؤوس المضلع النوني هي :

فيمكن البرهنة على أن :

إن هذه الزمرة تحتوي الدورنات $id, \sigma , \sigma^2 ,..... , \sigma^{n-1}$

والانعكاسات $\tau , \sigma\tau , \sigma^2\tau , ..., \sigma^{n-1}\tau$

ولدينا العلاقات : $\sigma^n = \tau^2 = id$

$\tau\sigma = \sigma^{n-1} \tau$

وذلك لأن $\tau\sigma$ انعكاس، فرتبته 2 إذن :

$$\tau\sigma = (\tau\sigma)^{-1} = \sigma^{-1} \tau^{-1} = \sigma^{n-1} \tau$$

إن هذه الزمرة يرمز لها بالرمز D_n وبها $2n$ عنصراً وهي غير إبدالية لأن تركيب التطبيقات غير إبدالي.

٧) زمر المصفوفات : لتكن $M_{nxn} (\mathbb{R})$ مجموعة جميع المصفوفات المربعة من النـــوع nxn التي عناصرها أعداد حقيقية. إن النظام $(M_{nxn} , +)$ زمرة إبدالية.

- أيضاً $GL_n(\mathbb{R}) = \{ A \in M_{nxn} (\mathbb{R}) : |A| \neq 0 \}$

  زمرة غير إبدالية مع عملية ضرب المصفوفات .

  تسمى الزمرة الخطية العامة General Linear Group.

- $SL_n(\mathbb{R}) = \{ A \in GL_n (\mathbb{R}) : |A| = 1 \}$

  تسمى الزمرة الخطية الخاصة Special Linear Group.

- $O_n(\mathbb{R}) = \{ A \in GL_n (\mathbb{R}) : A^T = A^{-1} \}$

  تسمى الزمرة العمودية Orthogonal Group

- $SO_n(\mathbb{R}) = SL_n (\mathbb{R}) \cap O_n (\mathbb{R})$

  تسمى الزمرة العمودية الخاصة Special Orthogonal Group

- $U_n(\mathbb{C}) = \{ A \in M_{nxn} (\mathbb{C}) : \overline{A}^T = A^{-1} \}$

تسمى الزمرة الأحادية Unitary Group.

- $SU_n(\mathbb{C}) := \{ A \in U_n(\mathbb{C}) : |A| = 1 \}$

تسمى الزمرة الأحادية الخاصة Special Unitary Group .

$$T := \{ \begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & a_{22} \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_{nxn}(\mathbb{R}) : a_{ii} \neq 0 \}$$

تشكل زمرة، وكحالة خاصة منها :

$$U = \{ \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & 1 \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in M_{nxn}(\mathbb{R}) \}$$

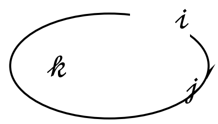
تشكل زمرة تسمى أحادية القدرة Unipotent.

٨) زمرة كواتيرنيون (الرباعيات) Quaternion بها 8 عناصر كما يلي :-

$$Q_8 = (\{ \pm 1 , \pm i , \pm j , \pm k \}, .)$$

حيث إن 1 هو المحايد $(1-)^2 = 1 , i^2 = j^2 = k^2 = -1$

$$ij = k \quad , \quad jk = i \quad , ki = j$$
$$ji = -k \quad , \quad kj = -i \quad , \quad ik = -j$$



واضح أن Q_8 غير إبدالية.

٩) اعتبر الفترة نصف المفتوحة $G = [\,0 , 1\,)$، ولنعرف على G العملية التالية :

$$x \boxplus y = x + y - [\,x + y\,]$$

إن $\boxplus$ حسنة التعريف لأنه لأي عدد حقيقي x فإن $0 \leq x - [\,x\,] < 1$، خاصية الإبدال واضحة.

خاصية التجميع : نريد أن نثبت أن :

$$L.H.S = x + y - [x + y] \boxplus z$$
$$= x + y - [x + y] + z - \left[x + y + z - [x + y] \right]$$
$$R.H.S = x \boxplus y + z - [\,y + z\,]$$
$$= x + y + z - [\,y + z\,] - \left[x + y + z - [\,y + z\,] \right]$$

بالاختصار : يبقى برهان أن :

$$-[\,x + y\,] - \left[x + y + z - [\,x + y\,] \right] =$$
$$-[\,y + z\,] - \left[x + y + z - [\,y + z\,] \right]$$

الآن المقدار $[\,x + y\,]$ يساوي إما صفراً أو 1، وكذلك المقدار $[\,y + z\,]$.

فإذا تساويا فالمطلوب تحقق. نفرض أن $[\,y+z\,]=0$ و $[\,y+z\,]=1$

فنجد أن $-[\,x+y+z\,] = -1-[\,x+y+z-1]$

وهذا مستحيل لأن الطرف الأيمن أقل من الطرف الأيسر، وبالمثل لو حدث العكس.

إذن $[\,x+y\,] = [\,y+z\,]$، وبذلك يتحقق التجميع.

لإثبات قانون الاختصار، مثلاً :- نفرض أن : $x \boxplus y = x \boxplus z$

$$\Rightarrow x+y-[\,x+y\,] = x+z-[\,x+z\,]$$

لو كان $[\,x+y\,]=[\,x+z\,]$ فالاختصار ممكن :

نفرض أن : $[\,x+y\,]=0$ و $[\,x+z\,]=1$

إذن : $1 = x+z-x-y = z-y$

وهذا مستحيل. المحايد هو 0 ولكل $x \neq 0$ في G فإن $x^{-1} = 1-x$

الزمرة الجزئية : لتكن G زمرة، $H \subseteq G$، نقول إن H زمرة جزئية من G ونكتب ذلك رمزياً $H \leq G$ إذا تحقق أن $H \neq \emptyset$ ولكل $x, y \in H$ فإن $xy^{-1} \in H$.

مثال :

١) $(\mathbb{Z},+) \leq (\mathbb{R},+)$

٢) $(\{\pm 1, \pm i : i = \sqrt{-1}\},.) \leq (C^*,.)$

٣) $(n\mathbb{Z},+) \leq (\mathbb{Z},+)$

٤) $SL_n(\mathbb{R}) \leq (GL_n(\mathbb{R})$

٥) في الزمرة : $D_n = \{\sigma, \tau : \sigma^n = \tau^2 = 1 \;,\; \tau\sigma = \sigma^{n-1}\tau\}$

نجد أن : $< 1, \sigma \ldots, \sigma^{n-1} > = < \sigma > \leq D_n$

وتسمى الزمرة الجزئية المولدة بالعنصر σ. وبشكل عام فلأي زمرة G ولأي عنصر $g \in G$ فإن :

مبرهنة : إذا كانت G زمرة H,K زمرتين جزئيتين من G فإن $H \cap K \leq G$

البرهان :

واضح أن $1 \in H \cap K$ لأن كلاً من H, K زمرة جزئية.

$$\Rightarrow H \cap K \neq \emptyset$$

الآن : ليكن $x, y \in H \cap K$

$$\Rightarrow x, y \in H \quad \wedge \quad x, y \in K$$
$$\Rightarrow x, y^{-1} \in H \quad \wedge \quad x, y^{-1} \in K$$

$$\Longrightarrow xy^{-1} \in \mathrm{H} \cap \mathrm{K}$$

- الاتحاد غير محقق : فمثلاً :-

$$(2\,\mathbb{Z}, +) \leq (\mathbb{Z}, +)$$
$$(3\,\mathbb{Z}, +) \leq (\mathbb{Z}, +)$$
$$2 \in 2\,\mathbb{Z} \quad \wedge \quad 3 \in 3\,\mathbb{Z}$$

ولكن :

$$2 + 3 = 5 \notin 2\,\mathbb{Z} \cup 3\,\mathbb{Z}$$
$$\Longrightarrow 2\,\mathbb{Z} \cup 3\,\mathbb{Z} \nleq (\mathbb{Z}, +)$$

ملاحظة : يمكن بسهولة تعميم المبرهنة أعلاه إلى أي عدد من الزمر الجزئية.

تعريف : لتكن G زمرة و $\mathrm{S} \subseteq \mathrm{G}$.

نعرف مركز S في G كما يلي :

$$\mathrm{C_G(S)} = \{ x \in \mathrm{G} : x\mathrm{s} = \mathrm{s}x \ \forall \ \mathrm{s} \in \mathrm{S} \}$$

ونعرف منظم S في G كما يلي :

$$N_{\mathrm{G}}(\mathrm{S}) = \{ x \in \mathrm{G} : x\mathrm{S} = \mathrm{S}x \}$$

من التعريف مباشرة لدينا : $\mathrm{C_G(S)} \subseteq N_{\mathrm{G}}(\mathrm{S})$

الآن نوضح أن كلاً من المركز والنظم زمرة جزئية من G كما يلي :

ليكن : $\mathrm{a, b} \in \mathrm{C_G(S)}$. نلاحظ أن :

$a$bs

وكذلك :

$$\mathrm{bs} = \mathrm{sb}$$
$$\Longrightarrow \mathrm{b^{-1}(bs)\,b^{-1}} = \mathrm{b^{-1}\,(sb)\,b^{-1}} \qquad \forall\, \mathrm{s} \in \mathrm{S}$$

بالمثل نثبت المنظم.

تعريف : مركز الزمرة G هو Z (G) يعرف كما يلي (C(G)) هو بالتعريف $\mathrm{C_G(G)}$.

تعريف: إذا كانت $\mathrm{S} \subseteq \mathrm{G}$ و G زمرة فإن:

أصغر زمرة جزئية من G تحتوي S $< \mathrm{S} > := S$،

وتسمى هذه الزمرة بالزمرة الجزئية المولدة بـــ S.

تعريف : ليكن $a \in \mathrm{G}$. إن أصغر عدد طبيعي n يحقق $a^n = 1$ يسمى رتبة العنصر a ويرمز له الرمز $O(a)$. وإذا لم يوجد مثل هذا العدد الطبيعي فنقول إن $O(a) = \infty$.

مبرهنة :- ليكن $O(a) = n$ فإن :-

$$a^m = 1 \Longrightarrow n \mid m \qquad \text{(i)}$$
$$O(a^k) = \frac{n}{\gcd(n,k)} \qquad \text{(ii)}$$

البرهان : (i) من التعريف لدينا $n \le m$ ومن خوارزمية القسمة يوجد r,q بحيث :

$m = nq + r$ حيث $0 \le r < n$

$$1 = a^m = (a^n)^q . a^r = a^r \Longrightarrow r = 0$$

(ii) لمعرفة $O(a^k)$ نبحث عن أقل عدد طبيعي t بحيث $(a^k)^t = a^{kt} = 1$

أي نبحث عن أقل عدد طبيعي t بحيث $n \mid kt$

أي نبحث عن أقل عدد طبيعي kt يقبل القسمة على كل من k,t .

إذن : $kt = l.c.m(n.k)$

$$\Longrightarrow t = \frac{l.c.m(n,k)}{k} = \frac{n}{gcd(n,k)}$$

تعريف : **الزمرة الدائرية** : هي الزمرة المولدة بعنصر واحد.

نظرية لاجرانج : إذا كانت G زمرة منتهية، $\mathrm{H} \le \mathrm{G}$ فإن $|\mathrm{H}| \mid |\mathrm{G}|$.

البرهان : نعرف العلاقة " ~ " كما يلي على G :

$$x \sim y \iff xy^{-1} \in \mathrm{H}$$

إن العلاقة " ~ " علاقة تكافؤ، وبالتالي فهي تجزئ G إلى فصول تكافؤ منفصلة عن بعضها، كل منها يأخذ الشكل $\mathrm{H}g$ حيث $g \in \mathrm{G}$

الآن لأي فصلي تكافؤ $\mathrm{H}g_1, \mathrm{H}g_2$ فإن التطبيق :

هو تقابل وبالتالي: $|\mathrm{H}g_1| = |\mathrm{H}g_2|$ لأي $g_1, g_2 \in \mathrm{G}$

إذن : $$|\mathrm{G}| = \sum |\mathrm{H}g_i| = m|\mathrm{H}_e|$$

الجمع على $\mathrm{H}g_i$ المنفصلة مثنى مثنى ، وليكن عددها m.

المجموعات $\mathrm{H}g$، $g \in \mathrm{G}$ تسمى مجموعات مشاركة يمنى، وبالمثل لو عرفنا العلاقة $x^{-1}y \in \mathrm{H}$ لحصلنا على المجموعات المشاركة اليسرى.

تعريف : في النظرية السابقة العدد m يسمى دليل الزمرة الجزئية H في الزمرة G ويرمز له بالرمز [G:H].

تمارين الأسبوع الثاني:

تمارين الفصل الثاني :

- تمرين(6)
- تمرين(9)
- تمرين(10)
- تمرين(13)
- تمرين(16)