زمرة التناظر والزمرة المتناوبة :

سنعتبر الزمرة S_n وعناصرها تطبيقات تقابل (تبديلات) من المجموعة :

$S=\{1, 2 ,\ldots\ldots, n\}$ إلى نفســها .

إن كل عنصر مثل σ يمكن كتابته بالشكل . $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\ldots\ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3)\ldots\ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$

ففي الزمرة S_7 العنصر $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 7 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ يعني أن $\sigma(1) = 4$

و $\sigma(6) = 6$ وهكذا.

سنكتب σ على هيئة دورات منفصلة كما يلي :

طول الأولى 2 وطول الثانية 4 وطول الأخيرة 1 وعــادة لا نكتب الدورة التي طولها 1 فيكون:

$$\sigma=(1\ \ 4)(\ 2\ \ 3\ \ 5\ \ 7\ )$$

وضوحاً كل تبديل (عنصر من S_n) يمكن كتابته على هيئة دورات منفصلة .

إن رتبة الدورة $(i_1\ i_2\ i_3\ \ldots\ldots\ i_k)$ تساوي K ورتبة التبديل الذي يكتب على هيئة دورات منفصلة أطوالها $k_1\ k_2, \ldots, k_r$ تساوي :

$$\text{l.c.m}\ (K_1, K_2, \ldots, K_r)$$

مبرهنة : ليكن $\sigma \in S_n$. إن لكل دورة $(i_1\ i_2\ i_3\ \ldots\ldots\ i_k)$ فإن :

$$\sigma(\ i_1\ i_2\ i_3\ \ldots\ldots\ i_k\ ) = (\sigma(i_1)\ \sigma(i_2)\ldots\ldots\ \sigma(i_k))$$

البرهان :-

σ

$\sigma(i_1$

$$\Rightarrow \sigma(i_1\ i_2 \dots \dots i_k)\sigma^{-1} = \left(\sigma(i_1)\sigma(i_2) \dots . \sigma(i_k)\right)$$

نتيجة (١) : كل الدورات التي أطوالها متساوية هي مترافقة .

البرهان : لتكن :

$$C = (i_1\ i_2 \dots . i_k)$$

$$C^* = (j_1\ j_2 \dots . j_k)$$

اعتبر $\sigma \in S_n$ بحيث :

$$\Rightarrow \sigma(i_1\ i_2 \dots\dots i_k)\sigma^{-1} = \left(\sigma(j_1)\ \sigma(j_2) \dots . \sigma(j_r)\right) = (j_1\ j_2 \dots . j_k)$$

نتيجة (٢) : إذا كان $\gamma, \lambda \in S_n$ لها نفس عدد الدورات بنفس الطول أي :

فإنه بتعريف σ كما في النتيجة السابقة على جميع الدورات نجد أن :-

$$\sigma\lambda\ \sigma^{-1} = \sigma c_1 \sigma^{-1}\ \sigma c_2 \sigma^{-1} \dots . \sigma c_t \sigma^{-1} = c_1^*\ \ c_2^* \dots \dots c_t^* = \lambda$$

مبرهنة : كل دورة $(i_1\ i_2 \dots . i_k)$ يمكن كتابتها على هيئة حاصل ضرب مناقلات .

$$(i_1\ i_2 \dots . i_k) = (i_1\ i_2)(i_2\ i_3) \dots\dots (i_{k-2}\ i_{k-1})(i_{k-1}\ i_k)$$

البرهان : لاحظ أن :

$$(i_1 i_2 \dots\dots i_k) = (i_1\ i_2)(i_2\ i_3)(i_3\ i_4) \dots \dots . . (i_{k-2}\ i_{k-1})(i_{k-1}\ i_k)$$

ولإيضاح ذلك نجد أن :

$i_{r+1} \longrightarrow i_r$ في الطرف الأيسر

وفي الطرف الأيمن: (i_rتخلومن) (i_{r+1} i_r) (تخلومن i_{r+1})

يصور i_r إلى i_{r+1}

إذن التبديلان متساويان .

****

<u>تمارين الأسبوع الثالث:</u>

تمارين الفصل الثالث:

- **تمرين(1):(أ،ب،د،هـ).**
- **تمرين(2):(أ،ب).**
- **تمرين(5).**
- **تمرين(6).**
- **تمرين(12).**
- **تمرين(24).**