تمارين ٣٨٤ ريض

التحليل الحقيقي – ٢

مبادئ التحليل الحقيقي- الجزء الثاني- د. صالح السنوسي ، د. محمد القويز \ الطبعة الثانية

البند	التمارين
١-١	١-٣-٤-٥-٦-٧-٨-٩-١٠-١١-١٢
١-٢	١-٢-٣-٤-٥
١-٣	١-٢-٣-٤-٥-٦-٧-٨-٩-١٠
١-٤	٢-٣-٤-٥-٦-٧-٨-٩-١٠(i-ii)
١-٥	١(i-ii-iii-iv)- ٢-٣-٤-٥-٦
٣-١	٣-٤-٥-٧-٨-٩-١٠-١١-١٢-١٣-١٤-١٥
٣-٢	١-٢-٤-٥-٦-٧-٨-١٠-١٢-١٣
٣-٣	١(i-ii-iii-iv)-٢-٤-٦
٤-١	١-٤-٦-٧-٨-١٠ + ٣ تمارين مرفقة
٤-٢	١-٢-٣-٤-٥-٦
٤-٣	١-٢-٤-٥-٦-٧-٨+ تمرين مرفق
٤-٤	١-٢-٣-٤-٥- ٩ + تمرين مرفق
٥-١	١-٢-٣-٤-٦-٧
٥-٢	١-٢-٣-٤-٥-٦-٧
٥-٣	١-٢-٣-٤-٥-٦
٥-٤	١-٢-٣-٧-٩-١٠

التمارين الإضافية

١-

فيما يلي قرِّر ما إذا كانت $\mathcal{D}$ جبرًا بوليًا أم جبر سيجما

(i) Ω مجموعة غير منتهية وَ $\mathcal{D}$ تتكون من مجموعاتها الجزئية المنتهية.

(ii) Ω مجموعة غير منتهية وَ $\mathcal{D}$ تتكون من مجموعاتها الجزئية المنتهية أو ذات المتممات المنتهية.

(iii) Ω مجموعة غير قابلة للعد وَ $\mathcal{D}$ تتكون من مجموعاتها الجزئية القابلة للعد.

(iv) Ω مجموعة غير قابلة للعد وَ $\mathcal{D}$ تتكون من مجموعاتها الجزئية القابلة للعد أو ذات المتممات القابلة للعد.

٢-

. اعط مثالاً يوضح أن الاتحاد $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{A}_\lambda$ ، حيث $\mathcal{A}_\lambda$ جبر سيجما في Ω، ليس بالضرورة جبر سيجما في Ω .

٣-

. اوجد مجموعة غير منتهية من عناصر $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ تحتوي $\mathbb{R}$ ومغلقة بالنسبة للاتحادات والتقاطعات القابلة للعد، ولكنها ليست جبر سيجما.

٤- لأي متتالية (E_n) من مجموعات Ω الجزئية، نعرّف

$$E^* = \limsup_{n\to\infty} E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$$

$$E_* = \liminf_{n\to\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} E_k$$

سنقول إن (E_n) **متقاربة** من **النهاية** E إذا كان $E^* = E_* = E$. تحقّق من صحة التقارير التالية:

(i) E^* مكونة من العناصر التي تنتمي لعدد غير منته من المجموعات E_n .

(ii) E_* مكونة من العناصر التي تنتمي لجميع المجموعات E_n باستثناء عدد منته منها.

(iii) إذا كانت (E_n) متزايدة فإن $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ ، وإذا كانت متناقصة فإن $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$.

(iv) إذا كانت المتتالية (E_n) في جبر سيجما $\mathcal{A}$، فإن $E^*, E_* \in \mathcal{A}$.

٥-

أثبت أن الدالة $f: \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ قابلة لقياس لبيق إذا وفقط إذا كانت $f^{-1}(B) \in \mathcal{M}$ لكل $B \in \mathcal{B}$.