جامعة الملك سعود / كلية العلوم قســـــم الرياضيات	بســم الله الرحمن الرحيم	الفصل الثاني ١٤٢٦ / ١٤٢٧ هـ الزمن // ثلاث ساعات
الأسم / .... رقم الحضور في المحاضرات/	الإختبار النهائي في المقرر ٢٤٢ريض رقم الشعبة /	الرقم الجامعي / .... أستاذ المادة / ....

رقم السؤال	الأول	الثاني	الثالث	الرابع	الخامس	السادس	المجموع
الدرجة	$\overline{}$ 4	$\overline{}$ 5	$\overline{}$ 6	$\overline{}$ 4	$\overline{}$ 4	$\overline{}$ 6	$\overline{}$ 29

رقم السؤال	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	الدرجة
رمز الإجابة								
رقم السؤال	٨	٩	١٠	١١	١٢	١٣	١٤	
رمز الإجابة								21

الدرجة النهائية	
	50

<u>لاحظ أن عدد الورقات ثمان ورقات</u>

<u>أستخدم خلف الورقات فقط كمسودة</u>

الجزء الأول : [درجة و نصف لكل سؤال] ضع رمز الإجابة الصحيحة للأسئلة من ١ إلى ١٤ في الجدول المعطى :

(١) إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة 3 بحيث أن $A = E_{R_{12}}\, E_{2R_3}\, E_{-1R_{23}}$ ، فإن A^{-1} تساوي :

(أ) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ (ج) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

(٢) إذا كانت $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a+x & b+x & c+x \\ a-2x & b-2x & c-2x \end{bmatrix}$ ، فإن :

(أ) $|A| = x^2(a+b+c)$ (ب) $|A| = a+b+c$ (ج) $|A| = x(a+b+c)$ (د) $|A| = 0$

(٣) إذا كانت $A = \begin{bmatrix} \alpha-3 & 2 & 0 \\ 2 & \alpha-3 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-5 \end{bmatrix}$ ، فإن مجموعة قيم الثابت α التي تجعل للنظام $AX = O$ عدداً لانهائياً من الحلول هي :

(أ) $\{ 3 , 5 \}$ (ب) $\{ 1 , 5 \}$ (ج) $R \setminus \{ 1 , 5 \}$ (د) $\{ 2 , 3 , 5 \}$

(٤) إذا كانت $S = \{ p_1(x) = 1 + x - 2x^2 \ , \ p_2(x) = 5x - x^2 \ , \ p_3(x) = x + x^2 \ \}$ مجموعة جزئية من فضاء كثيرات الحدود $P_2[x]$ ، فإن :

(أ) $p_2(x)$ تركيب خطي من $p_1(x)\ ,\ p_3(x)$ (ب) S لا تولد $P_2[x]$

(ج) S مستقلة خطياً في $P_2[x]$ (د) $\dim < S > = 2$

(٥) إذا كانت كل من :

$S = \{ (1,1,-1), (2,3,-1), (3,1,-5) \}$ ، $B = \{ (1,-1,-3), (2,1,-3), (3,-2,-8) \}$

مجموعة جزئية من R^3 ، فإن :

(أ) $\dim < B > = \dim < S > = 1$ (ب) $R^3 = < B >$ (ج) $R^3 = < S >$ (د) $\dim < B > = \dim < S > = 2$

(٦) إذا كان $M = \{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a + b = 2c + d \ \}$ فضاءً جزئياً من فضاء المصفوفات $M_{2\times2}$ ، فإن قيمة الثابت α التي تجعل المتجه $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix}$ ينتمي للفضاء $M_{2\times2}$ هي :

(أ) 0 (ب) 1 (ج) 2 (د) -1

(٧) إذا كانت A مصفوفة من سعة 4×7 ، فإن :

(أ) الفضاء الصفي يساوي الفضاء العمودي (ب) بعد الفضاء العمودي يساوي 5

(ج) متجهات الأعمدة مرتبطة خطياً (د) متجهات الأعمدة مستقلة خطياً

(٨) إذا كانت المجموعة $\{ (1, \sqrt{2}) , (-1, \sqrt{2}) \}$ تشكل أساساً متعامداً عيارياً للفضاء R^2 بالنسبة للضرب الداخلي المعرف بالقاعدة $< (a,b),(a',b') > = h_1 aa' + h_2 bb'$ ، فإن :

(أ) $h_1 = \frac{1}{4}, h_2 = \frac{1}{2}$ (ب) $h_1 = \frac{1}{2}, h_2 = \frac{1}{4}$ (ج) $h_1 = \frac{1}{2}, h_2 = \frac{1}{2}$ (د) $h_1 = \frac{1}{4}, h_2 = \frac{1}{4}$

(٩) إذا كان T مؤثراً خطياً على R^2 و كان $[T]_B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ حيث $B = \{ (1,1) , (1,2) \}$ ، فإن :

(أ) $T(x,y) = (x+y, -2x+4y)$ (ب) $T(x,y) = (x+y, 2x-4y)$

(ج) $T(x,y) = (x-y, 2x+4y)$ (د) $T(x,y) = (x-y, 2x-4y)$

(١٠) إذا كان $T: V \to P_4[x]$ تحويلاً خطياً شاملاً و كان $\dim KerT = 2$ ، فإن :

(أ) $\dim V = 5$ (ب) $\dim V = 6$ (ج) $\dim V = 7$ (د) $\dim V = 4$

(١١) إذا كان T مؤثراً خطياً على $P_2[x]$ بحيث أن $T(x^2) = x$ ، $T(1-x) = 1+2x$ ، $T(1+x) = 2x$ ، فإن :

(أ) $\dim Ker\, T = 2$ (ب) $\dim Ker\, T = 1$ (ج) $\dim \operatorname{Im} T = 1$ (د) T أحادي

(١٢) إذا كان T مؤثراً خطياً على R^2 و معرفاً بالقاعدة $T(x,y) = (x+2y, \alpha x + 2y)$ ، فإن مجموعة قيم الثابت α التي تجعل T تماثلاً هي :

(أ) $\{ -1 \}$ (ب) $\{ 1 \}$ (ج) $R \setminus \{ -1 \}$ (د) $R \setminus \{ 1 \}$

(١٣) إذا كان $T: R^2 \to R^3$ تحويلاً خطياً معرفاً بالقاعدة $T(x,y) = (x-2y, -y, 2x+y)$ و كان كل من $B = \{ (1,0), (0,-1) \}$ و $S = \{ (1,0,0), (1,1,0), (1,1,1) \}$ أساساً في R^2 و R^3 على الترتيب ، فإن :

(أ) $[T]_B^S = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ (ب) $[T]_B^S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ (ج) $[T]_B^S = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ (د) $[T]_B^S = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(١٤) إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة 2 و ليس لها معكوس و كانت $\lambda = 2$ قيمة مميزة لها ، فإن :

(أ) $\dim E_2 = 2$ (ب) A غير قابلة للإستقطار (ج) A قابلة للإستقطار (د) لا شيء مما ذكر

الجزء الثاني [تسع وعشرون درجة] : أجب عن الأسئلة التالية في نفس ورقة الأسئلة :

السؤال الأول : [أربع درجات]

لأي متجهين u, v من فضاء ضرب داخلي V ، أثبت أن $| < u,v > | \le \| u \| \| v \|$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

<u>السؤال الثاني</u> : [خمس درجات]

لتكن كل من $S = \{\ 2 + x\ ,\ 1 + 2x\ \}\ ,\ B = \{\ 1 + x\ ,\ 1 - x\ \}$ أساساً لفضاء كثيرات الحدود $P_1[x]$. **<u>أحسب</u>** ${}_S P_B$ (مصفوفة الانتقال من الأساس B إلى الأساس S) و من **ثم** **<u>تحقق</u>** من صحة العلاقة :

$${}_S P_B [4 - 3x]_B = [4 - 3x]_S$$

السؤال الثالث : [ست درجات]

إذا كانت $S=\{v_1 , v_2 , ..., v_n\}$ أساساً لفضاء متجهات V بينما $B=\{ w_1 , w_2 , ..., w_n\}$ مجموعة جزئية من فضاء متجهات W ، فأثبت أنه يوجد تحويل خطي وحيد $T:V\rightarrow W$ بحيث أن

$$T(v_i)=w_i \quad , \quad i=1,2,...,n$$

السؤال الرابع : [أربع درجات]

إذا كان كل من V و W فضاء متجهات منتهيي البعد ، فأثبت أن V و W متماثلان إذا و فقط إذا كان $\dim V = \dim W$.

<u>السؤال الخامس</u> : [أربع درجات]

إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n ، فأثبت أن A قابلة للإستقطار <u>إذا و فقط إذا</u> كان لها n من المتجهات المميزة المستقلة خطياً .

<u>السؤال السادس</u> : [ست درجات]

ليكن T مؤثراً خطياً على R^3 معرفاً بالقاعدة $T(x,y,z)=(x,y+z,y+z)$

(i) عين القيم المميزة للمؤثر الخطي T .

(ii) هل T قابل للإستقطار ؟ و إذا كان كذلك فعين أساساً B للفضاء R^3 بحيث تكون $[T]_B$ مصفوفة قطرية .